

Задаци - друга недеља

задаци са * су посебно важни

1. Доказати да је диференцијабилна функција $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ строго растућа ако и само ако је $f'(x) \geq 0$ и скуп

$$\{x \in (a, b) \mid f'(x) > 0\}$$

свуда густ у (a, b) .

2. * Нека је $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна функција чији је први извод непрекидан и нека је $f'(t_0) < 0$ за неко $t_0 \in (a, b)$. Доказати да је f опадајућа у некој околини тачке t_0 .
3. Посматрајмо функцију $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, задату са

$$f(x) = \begin{cases} 0 \sin \frac{1}{x}, & x \in [-1, 0], \\ x^{3/2} \sin(1/x), & x \in (0, 1] \end{cases}.$$

- а) Доказати да је f диференцијабилна у свакој тачки.
- б) Доказати да функција f' није ограничена. Упоредити овај резултат са Вајерштрасовом теоремом за непрекидне функције.

4. Доказати Лопиталову теорему у случају кад $g(x) \rightarrow +\infty$ кад $x \rightarrow a +$.

5. Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$.

6. * Доказати да је функција

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-1/x^2}, & x > 0 \end{cases}$$

бесконечно пута диференцијабилна. Израчунати њен Маклоренов полином n -тог степена.

7. * Израчунати Маклоренове полиноме функција $\sin x$ и $\cos x$.